II appello 30/8/18 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Siano v_1, v_2, v_3 vettori non nulli di uno spazio vettoriale V.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti, la dimensione di V è minore di 3.
(b) Se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v_3$ per qualche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti.
(c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti allora $\dim \operatorname{span}\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\} = 3$.
(d) Se $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = 2$ allora, comunque presi due vettori di $\{v_1, v_2, v_3\}$, questi sono linearmente indipendenti.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 145 & 0 \\ 34\pi & \frac{112}{\sqrt{4509}} & 9999 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per ogni valore di α, β.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è 2 per $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.
(c) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non è diagonalizzabile per alcun valore di α, β.
(d) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ ha un solo autovalore, con molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica dipendente da α ma non da β.

Q3) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $T(v) = w$ allora T è iniettivo.
(b) Se esistono due basi ortonormali $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V tali che la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sia diagonale, allora T è auto-aggiunto.
(b) Se 0 non è autovalore di T, allora T è auto-aggiunto.
(d) Se per ogni $v \in V \setminus \{\underline{0}\}$ vale $\langle T(v), T(v) \rangle \neq 0$ allora T è suriettivo.

Q4) Sia A una matrice 3×3 non nulla con entrate reali.

(a) Se ogni minore 2×2 di A ha determinante 0, allora $\det A = 0$.
(b) Se la traccia di A è diversa da 0 allora A è invertibile.
(c) Se A è simmetrica il polinomio caratteristico di A non può essere $p(\lambda) = -\lambda^3$.
(d) Se A è simmetrica e ha un unico autovalore λ, allora $\lambda \neq 0$.

Q5) Sia $n > 1$. Sia A una matrice $n \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^n$. Sia A' la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se il sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzioni, allora esistono soluzioni al sistema $Ax = b$.
(b) Se il rango della matrice A' è uguale a n, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ha almeno una soluzione
(c) Se il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una unica soluzione allora $Ax = 0$ ammette la sola soluzione $x = \underline{0}$.
(d) Se il rango di A è minore di n, il sistema $Ax = b$ non ha soluzione per $b \neq \underline{0}$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2\lambda, y = \lambda + \mu, z = \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S è una retta affine di equazione $y = 2x + z, 2x - z = 0$.
(b) lo spazio ortogonale $(TS)^\perp$ è generato dal vettore $(1, -2, 2)$.
(c) S è parallelo al piano $x - 2y + 2z = 7$.
(d) L'equazione cartesiana di S è $x = 2, z = 1$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta il cui spazio tangente è generato da $(\log 37, -\log 37)$ e passante per il punto $(1, -1)$.

(a) La retta r non contiene l'origine.
(b) La distanza di r dal punto $(1, 1)$ è $\sqrt{2}$.
(c) r è ortogonale alla retta $x + y = 1$.
(d) Se $\mathcal{R} := \{O; v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate (x', y'), per cui O ha coordinate $x' = 0, y' = 0$ e per cui la retta $x = \lambda, y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ha equazione cartesiana $y' = 0$, allora r è data da $x' + y' = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : \alpha x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha - \beta^2 = 0$ una famiglia di insiemi al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha > 0, \beta \neq 0$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una ellisse.
(b) Esistono valori di α, β per cui $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una iperbole.
(c) Esistono valori di α, β per cui $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una parabola.
(d) Esiste un valore di α tale che per ogni $r > 0$ esistono 2 valori di β (dipendenti da r) tali che $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è metricamente equivalente ad una circonferenza di raggio r.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Sia $\mathrm{Mat}(2\times 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 con entrate reali. Sia $T:\mathrm{Mat}(2\times 2)\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \\ a+2d \end{pmatrix}$$

(1) Provare che T è una applicazione lineare.
(2) Determinare una base del nucleo di T e dell'immagine di T.
(3) Determinare una base di $(\mathsf{Im}\,T)^{\perp}$.
(4) Trovare la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, dove $\mathcal{B} := \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{B} := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Soluzioni:
Q1) b
Q2) b, c, d
Q3) d
Q4) a, c, d
Q5) c
Q6) b, c
Q7) b
Q8) a, b, d

Parte II

(1) Si tratta di provare che, date $A, B \in \mathrm{Mat}(2\times 2)$, allora $T(A+B) = T(A)+T(B)$ e che, per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, si ha $T(\lambda A) = \lambda T(A)$. Questo è un semplice calcolo, ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, si ha

$$T(A+B) = T\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)+(\alpha+\delta) \\ (a-d)+(\alpha-\delta) \\ (a+2d)+(\alpha+2\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \\ a+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha+\delta \\ \alpha-\delta \\ \alpha+2\delta \end{pmatrix} = T(A)+T(B).$$

(2) Per determinare il nucleo di T, risolviamo il sistema

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \\ a+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava subito $a = d = 0$. Pertanto una base del nucleo è data da $\mathcal{C} := \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Avendo il nucleo di T dimensione 2, dal teorema della dimensione, ne segue che l'immagine ha dimensione 2. Poiché $\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$ completano $\mathcal{C}$ ad una base di $\mathrm{Mat}(2\times 2)$, le loro immagini tramite T sono una base di $\mathsf{Im}\,T$. Ovvero, $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$ sono una base di $\mathsf{Im}\,T$.

(3) Per quanto visto nel punto (2), basta trovare un vettore (non nullo) ortogonale ai vettori $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$. Facendo il prodotto vettore di tali due vettori si ottiene $\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$, che è la base cercata di $(\mathsf{Im}\,T)^{\perp}$.

(4) Denotiamo con $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. Applicando T agli elementi di $\mathcal{B}$ e scrivendo tali vettori come colonne di matrice otteniamo la matrice

$$M := \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0 & -1\\1 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Questa è la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$.

Consideriamo adesso la matrice ottenuta ponendo come colonne i vettori della base $\mathcal{B}'$:

$$C := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Questa è la matrice di cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{E}$. La matrice di cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}'$ è C^{-1}, ovvero

$$C^{-1} := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(Notare che in effetti $C \cdot C = \mathsf{Id}$ e dunque $C = C^{-1}$).

Pertanto la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è data da $C^{-1} \cdot M$, ovvero:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0 & -1\\1 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$